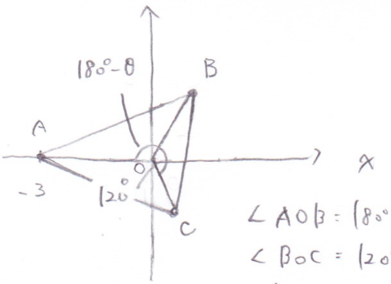
2010

第1問



$\angle AOB = 180° - \theta$

$\angle BOC = 120°$

$OB = 2,\ OC = 1$

(1) △OABの面積は ＊1

$\frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OB}|\sin(180°-\theta) = 3\sin\theta$

△OACの面積は

$\frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OC}|\sin(60°+\theta) = \frac{3}{2}\sin(\theta+60°)$

よって △OAB = △OAC のとき

$3\sin\theta = \frac{3}{2}\sin(\theta+60°)$

$2\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$-\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 0$

$-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) = 0$

$\sin(\theta - 30°) = 0.$

$0° < \theta < 120°$ より $\theta = 30°.$

(2) △OABと△OACの面積の和をSとすると

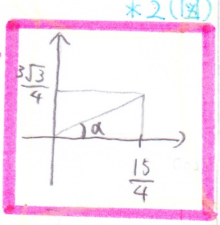
$S = 3\sin\theta + \frac{3}{2}\sin(\theta+60°)$

$= 3\sin\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$= \frac{15}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$

$= \frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$ ＊2

＊2(図)



但し αは ＊3

$\cos\alpha = \frac{15}{4} \Big/ \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{15}{6\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Big/ \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$

をみたす第1象限の定角で $0 < \alpha < 30°$ をみたす

$0° < \theta < 120°$ より

$\alpha < \theta + \alpha < 120° + \alpha.\ (< 150°)$

よって $\theta + \alpha = 90°$ すなわち

$\theta = 90° - \alpha$ のときに

Sは最大

$\frac{3\sqrt{7}}{2}$ をとり, $\sin\theta = \sin(90°-\alpha) = \cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

である。